Lage von Geraden zueinander

Gegeben sind die vier Geraden g_1, g_2, g_3 und g_4.

$$g_1:\ \vec{x} = \begin{pmatrix}5\\6\\0\end{pmatrix} + \lambda\begin{pmatrix}-3\\-2\\1\end{pmatrix} \qquad g_2:\ \vec{x} = \begin{pmatrix}2\\4\\1\end{pmatrix} + \mu\begin{pmatrix}3\\2\\-1\end{pmatrix} \qquad g_3:\ \vec{x} = \begin{pmatrix}1\\4\\0\end{pmatrix} + o\begin{pmatrix}-6\\-4\\2\end{pmatrix} \qquad g_4:\ \vec{x} = \begin{pmatrix}-1\\6\\0\end{pmatrix} + \nu\begin{pmatrix}-3\\2\\-1\end{pmatrix}$$

❶ g_1 und g_2 betrachten!

Die Richtungsvektoren sind kollinear, da $\begin{pmatrix}-3\\-2\\1\end{pmatrix} = -1\begin{pmatrix}3\\2\\-1\end{pmatrix}$ gilt. g_1 und g_2 sind also parallel.

I $\quad 5 - 3\lambda_s = 2 + 3\mu_s$
II $\quad 6 - 2\lambda_s = 4 + 2\mu_s$
III $\quad \lambda_s = 1 - \mu_s$

I + 3 III $\quad 5 = 5$
2 I - 3 II $\quad -8 = -8$
II + 2 III $\quad 6 = 6$ dieses sind wahre Aussagen, also sind g_1 und g_2 sogar **identisch**.

❷ g_1 und g_3 betrachten!

Die Richtungsvektoren sind mit k = 2 auch kollinear, also sind g_1 und g_3 **parallel**.

I $\quad 5 - 3\lambda_s = 1 - 6o_s$
II $\quad 6 - 2\lambda_s = 4 - 4o_s$
III $\quad \lambda_s = 2o_s$
II $\quad 3 - \lambda_s = 2 - 2o_s$

II + III $\quad 3 = 2$ falsche Aussage, also sind diese Geraden nicht identisch.

❸ g_1 und g_4 betrachten!

Die Richtungsvektoren sind nicht kollinear.

I $\quad 5 - 3\lambda_s = -1 - 3\nu_s$
II $\quad 6 - 2\lambda_s = 6 + 2\nu_s$
III $\quad \lambda_s = -\nu_s$

II + 2 III $\quad 6 = 6$ wahre Aussage
I + 3 III $\quad 5 = -1 - 6\nu_s$ hieraus folgt $\nu_s = -1$
2 I - 3 II $\quad 10-18 = -2 -18 -12\nu_s$ hieraus folgt $\nu_s = -1$
in I $\quad 5 - 3\lambda_s = -1 + 3$ hieraus folgt $\lambda_s = 1$
λ_s einsetzen in g_1 liefert den **Schnittpunkt** S (2 / 4 / 1) .

Da g_1 und g_2 identisch sind, genügt es, nur eine dieser Geraden mit den anderen zu vergleichen.

Es bleibt also nur noch übrig

❹ g_3 und g_4 zu betrachten.

Die Richtungsvektoren sind nicht kollinear.

I $1 - 6\ o_s = -1 - 3\ \nu_s$
II $4 - 4\ o_s = 6 + 2\ \nu_s$
III $2\ o_s = -\ \nu_s$
II $2 - 2\ o_s = 3 + \nu_s$

I - 3 III $1 - 12\ o_s = -1$ daraus folgt $o_s = \frac{1}{12}$

in III $\frac{1}{6} = -\ \nu_s$

I - 3 II $-5 = -10 - 6\ \nu_s$ daraus folgt $\nu_s = -\frac{5}{6}$

Da es verschiedene ν_s gibt, ist das Gleichungssystem nicht eindeutig lösbar, also sind diese beiden Geraden **windschief**.